جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

إمتحان مقرر تحليل (4)
لطلاب السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي 2018/2017

اسم الطالب [redacted]
المدة : ساعة ونصف
العلامة : 100

السؤال اول : (17علامة)

لتكن (x_k) متتالية في الفضاء $\mathbb{R}^n$ حيث $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n})$ ولتكن $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ نقطة من $\mathbb{R}^n$ ، اثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تتقارب المتتالية (x_k) من النقطة a هو أن تتقارب المتتاليات الحقيقية $(x_{k_1}), (x_{k_2}), \dots, (x_{k_n})$ من الأعداد $a_1, a_2, \dots a_n$.

السؤال الثاني : (25 علامة)

أ) عرّف تكافؤ نظيمين N_1 و N_2 على الفضاء المتجهي V .

ب) لتكن f و g دالتين حقيقيتين معرفتين على المجموعتين الجزئيتين A و B من $\mathbb{R}^n$ ولتكن a نقطة من $\overline{A \cap B}$ ، فإذا فرضنا وجود النهايتين $\lim_{x \to a} f(x)$ و $\lim_{x \to a} g(x)$ فاثبت $\lim_{x \to a}(f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$.

ج) ادرس وجود نهاية للدالة $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$ في النقطة $(0,0)$

ثم بيّن فيما إذا كانت مستمرة في تلك النقطة .

السؤال الثالث : (23 علامة)

عرّف التطبيق المستمر بانتظام بين فضائين متريين، ثم أثبت أنه إذا كان $(V, \|.\|)$ فضاءً منظماً فإن التطبيق $V \times V \to V \; ; \; (x,y) \to x+y$ مستمر بانتظام .

السؤال الرابع : (23 علامة)

أثبت أن الدالة $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرفة بالشكل $f(x,y) = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$ غير قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$.

السؤال الخامس : (15 علامة)

احسب التكامل الثنائي $I = \iint_S (x^2y + xy^2)\, dx\, dy$ حيث S السطح المحصور بالمستقيمات $x = y$ و $y = 2$ و $x = 0$.

د . عصام نسيم

حمص في 2018/1/31

سلم تصحيح مقرر تحليل (٤)

لطلاب السنة الثانية رياضيات

الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٧/٢٠١٨

السؤال الأول: 17

نختار في $\mathbb{R}$ المسافة المألوفة $d(x,y)=|y-x|$ وفي $\mathbb{R}^n$ المسافة

$$d_0((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n))=\sup_{1\le i\le n}|y_i-x_i|$$

لزوم الشرط: لنفرض ان المتتالية (x_k) تتقارب من النقطة a، عندئذ

$$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^{*+}\ \exists N_\varepsilon ;\forall k\in\mathbb{N},\ k\geqslant N_\varepsilon \Rightarrow d_0(x_k,a)=\sup_{1\le i\le n}|x_{k_i}-a_i|<\varepsilon$$

وبالتالي فان

$d(x_{k_i},a_i)=|x_{k_i}-a_i|<\varepsilon$ وذلك أياً كان i من المجموعة $\{1,\dots,n\}$ وهذا يعني ان المتتالية الحقيقية (x_{k_i}) تتقارب من العدد a_i. (10)

كفاية الشرط: لنفرض ان الشرط محقق عندئذ

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{*+},\ \exists N'_\varepsilon ;\forall k\in\mathbb{N},\ k\geqslant N'_\varepsilon \Rightarrow d(x_{k_i},a_i)=|x_{k_i}-a_i|<\varepsilon$$

وذلك أياً كان i من المجموعة $\{1,\dots,n\}$ وبالتالي فان: (7)

$d_0(x_k,a)=\sup_{1\le i\le n}|x_{k_i}-a_i|<\varepsilon$ وهذا يعني ان المتتالية (x_k) تتقارب من النقطة a.

السؤال الثاني: 25

a) إذا كان N_1, N_2 نظيمين على الفضاء المتجهي V ذاته، فإننا نقول أنهما متكافئان إذا وجد عددان حقيقيان $\alpha>0$, $\beta>0$ بحيث يكون (5)

$$\alpha N_1(x)\le N_2(x)\le\beta N_1(x)$$

b) لنفرض ان $\lim_{x\to a}f(x)=p$ و $\lim_{x\to a}g(x)=q$ عندئذ فان

$$\exists\delta_1\in\mathbb{R}^{+*},\ \forall x\in A ; d(x,a)<\delta_1\Rightarrow|f(x)-p|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists\delta_2\in\mathbb{R}^{+*},\forall x\in B ; d(x,a)<\delta_2\Rightarrow|g(x)-q|<\frac{\varepsilon}{2}$$

وبالتالي:

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}^{+*}$; $\forall x \in A \cap B , d(x,a) < \delta \Rightarrow$

$|f(x)+g(x) - (P+q)| \leq |f(x)-P| + |g(x)-q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ (10)

أي أن $\lim_{x \to a} [f(x)+g(x)] = P+q$ أي أن

$$\lim_{x \to a} [f(x)+g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

ب) إذا أخذنا المتتاليتين

$(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow[n \to \infty]{} (0,0)$

$(x'_n, y'_n) = (\frac{2}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow[n \to \infty]{} (0,0)$

نلاحظ أن:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x'_n, y'_n) = \lim_{n \to \infty} f(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{5}$$

وبما أن $\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(x'_n, y'_n)$ فإننا نستنتج حسب نتيجة أن النهاية $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ غير موجودة (10)

وبما أنه ليس للدالة نهاية في النقطة $(0,0)$ نستنتج أن الدالة غير مستمرة في تلك النقطة .

السؤال الثالث : 23

- ليكن (E, d_E) و (F, d_F) فضائين متريين و f تطبيقاً معرفاً على المجموعة الجزئية D من E ويأخذ قيمه في F ، نقول عن f أنه مستمر بانتظام على D إذا قابل كل عدد حقيقي موجب ε ، عدد ~~صحيح~~ حقيقي موجب δ بحيث أنه إذا كان x و y أي عنصرين من D يحققان $d_E(x,y) < \delta$ فإن $d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$ (7)

- يقابل كل عدد حقيقي موجب ε ، عدد حقيقي موجب $\delta = \varepsilon$ بحيث إذا كان (x,y) و (x',y') أي عنصرين من $V \times V$ يحققان:

$d^{(1)}((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y') = \|x-x'\| + \|y-y'\| < \delta$ (8)

فإن:

$d(x+y, x'+y') = \|(x+y) - (x'+y')\| \leq \|x-x'\| + \|y-y'\| < \delta = \varepsilon$ (8)

ال الرابع : 23

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$ (6)

$$f(h,k) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k + \eta(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$ (6)

$$h\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2} - 0 = h + 0 + \eta(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

$$h(h^2-k^2) = h(h^2+k^2) + \eta(h,k)(h^2+k^2)^{3/2}$$

$$\eta(h,k) = \frac{-2hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$ (6)

$$\lim_{h\to 0} \eta(h,h) = \lim_{h\to 0} \frac{-2h^3}{2\sqrt{2}h^3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$ (5)

وبالتالي لا يمكن للدالة η أن تتقارب من الصفر عندما $(h,k)\to(0,0)$
ومنه نستنتج ان الدالة f غير قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$.

السؤال الخامس : 15

y
y = x
y = 2
x
0

$$I = \int_0^2 dx \int_x^2 (x^2y + xy^2)\,dy$$

$$I = \int_0^2 dx \left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3}\right]_x^2$$ (8)

$$I = \int_0^2 dx\left[\left(2x^2 + \frac{8x}{3}\right) - \left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{3}\right)\right] = \int_0^2 \left(-\frac{5x^4}{6} + 2x^2 + \frac{8x}{3}\right)dx$$ (7)

$$= \left[-\frac{x^5}{6} + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{3}\right]_0^2 = -\frac{32}{6} + \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = -\frac{16}{3} + \frac{32}{3} = \frac{16}{3}$$

د. عصام نسيم